N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 1785

ARTICLE PRINCIPAL

Recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES APPLIQUEES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

de PARIS

par

Monsieur Guy NEUVY

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Etude probabiliste des erreurs accidentelles en topométrie

soutenue le 18 octobre 1967 devant la Commission d'Examen

MM. FORTET Président

VILLE, CAILLEUX) Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546604_0079

Ajustement des polygonales par la méthode du maximum de vraisemblance

Le calcul des probabilités, en dépit de l'importance croissante qu'il prend dans la technique moderne, ne figure pas encore au programme des écoles supérieures de géomètres. Il semble pourtant que la topométrie, et plus particulièrement la polygonation de précision, offre un vaste champ d'applications aux lois de probabilité, puisque toute mesure, en raison même de son imperfection, engendre un écart par rapport à la vraie grandeur mesurée. Cet écart, s'il est accidentel, répond exactement à la définition d'une variable aléatoire : sa valeur absolue et son signe ne peuvent être rigoureusement définis, car ils sont soumis aux lois du hasard.

La méthode de compensation des polygonales que nous proposons ici, a fait l'objet d'une thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences appliquées, soutenue à la Faculté des Sciences de Paris en 1967 (1). Un tel sujet, si souvent abordé, ne pouvait présenter d'intérêt qu'en le subordonnant à la théorie probabiliste, afin de concrétiser dans une technique, l'une des théories les plus abstraites des mathématiques.

Avant de développer la méthode du maximum de vraisemblance, nous avons consacré un chapitre à une autre méthode dans laquelle nous avons considéré comme variable aléatoire, le signe des erreurs accidentelles. Nous ne la proposons pas ici, car cette méthode n'assure pas la meilleure compensation possible; elle permet, certes, de réaliser une répartition assez probable des signes mais cette répartition reste aléatoire car nous n'avons jamais la certitude de compenser un écart négatif par un terme correctif positif; il s'ensuit un gros risque d'aggraver l'erreur de position de certains sommets dans la polygonale. Ce n'est évidemment pas le but proposé, et si nous avons développé une telle méthode, en montrant qu'elle ne mène à aucun résultat valable, c'est pour répondre à ceux qui trouvent illogique d'affecter un même signe aux termes correctifs d'une polygonale.

MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Notre but est de proposer une méthode reposant exclusivement sur des lois mathématiques précises. En matière de calcul des probabilités et de statistiques, il existe plusieurs méthodes de recherches. Une seule est actuellement utilisée en topométrie : la méthode des moindres carrés.

Ce procédé conduit à résoudre un grand nombre d'équations linéaires; les calculs exigent beaucoup de temps, si bien qu'on ne l'utilise pratiquement que pour des travaux géodésiques et en polygonation de précision.

Nous allons donc développer une autre méthode : celle du maximum de vraisemblance, bien connue des probabilistes, qui donne la solution la plus vraisemblable; c'est une méthode optimale.

En général, la méthode des moindres carrés n'est pas optimale; elle l'est cependant dans le cas particulier qui nous intéresse, puisqu'elle est une application de la méthode du maximum de vraisemblance à la loi de Gauss. C'est donc seulement dans le but de trouver un procédé d'application plus simple que nous allons appliquer la méthode du maximum de vraisemblance à une loi de probabilité autre que celle de Gauss.

THÉORIE GÉNÉRALE

Soit une fonction $f(\theta; x) \geqslant 0$, où x est une variable aléatoire et θ un paramètre à déterminer; soient $x_1, x_2 \ldots x_n$ les valeurs prises par la variable x au cours de n expériences; on a ainsi une loi de probabilité à n dimensions, de densité :

$$\rho(\theta; x_1, x_2 \ldots x_n) = \prod_i (\theta; x_i)$$

Le principe de la méthode du maximum de vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ, consiste à lui donner une valeur telle que la fonction :

$$\rho(\theta; x_1, x_2 \ldots x_n)$$

ait sa plus grande valeur possible.

Cette fonction ρ est maximale quand la dérivée $\partial\rho/\partial\theta$ s'annule.

Dans le cas de la mesure d'une grandeur, la densité de probabilité est une fonction de la forme :

$$f(\theta; x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-[(x-\theta)^2/2\sigma^2]}$$

La méthode du maximum de vraisemblance fournit une estimation convergente en moyenne quadratique. En particulier, pour qu'il y ait résumé exhaustif d'ordre un, il faut et il suffit que $\mathrm{Log}\,(\theta;x)$ soit de la forme :

$$\mathrm{Log}\, f(\theta, x) = \beta'(\theta)\,(x - \theta) + \beta(\theta) + b(x)$$

à condition que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta; x)\, dx = 1 \text{ quel que soit } \theta$$

$\beta(\theta)$ et $b(x)$ pouvant être des fonctions quelconques; $\beta'(\theta)$ est ici la dérivée par rapport à θ de $\beta(\theta)$.

(1) Un exemplaire de cette thèse a été déposé à la bibliothèque de l'Institut de Topométrie, 292, rue Saint-Martin, Paris (3e), et un autre au C.N.R.S., 15, quai Anatole-France, Paris (7e), enregistré sous le numéro 1785. Son titre exact est : *Etude probabiliste des erreurs accidentelles en topométrie.*

$$\beta(\theta) = \frac{\theta}{2\sigma^2} \quad \text{et} \quad b(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \text{Log}(\sigma\sqrt{2\pi})$$

nous avons bien :

$$\text{Log } f(\theta, x) = \text{Log}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-[(x-\theta)^2/2\sigma^2]}\right]$$

$$= -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \text{Log}(\sigma\sqrt{2\pi})$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + 2\theta^2 - \theta^2 - 2x\theta) - \text{Log}(\sigma\sqrt{2\pi})$$

$$= \frac{\theta}{\sigma^2}(x-\theta) + \frac{\theta^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \text{Log}(\sigma\sqrt{2\pi})$$

$$= \beta'(\theta)(x-\theta) + \beta(\theta) + b(x)$$

avec :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(x-\theta)^2/2\sigma^2]}\, dx = 1$$

puisque cette fonction se déduit de :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2/2)}.dt$$

par le changement de variable :

$$x = t\sigma + \theta$$

La fonction $f(\theta; x)$ a sa valeur maximale lorsque :

$$\frac{\partial \text{Log } f(\theta; x_i)}{\partial\theta} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial f(\theta; x_i)}{\partial\theta} \cdot \frac{1}{f(\theta; x_i)} = 0$$

Comme :

$$\text{Log } f(\theta; x) = \beta'(\theta)(x-\theta) + \beta(\theta) + b(x)$$

il nous faut :

$$\sum_i [\beta''(\theta)(x_i - \theta) - \beta'(\theta) + \beta'(\theta)] = 0$$

ou :

$$\beta''(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta) f(\theta; x)\, dx = 0$$

et après simplification par $\beta''(\theta)$:

$$E(x_i) = \theta$$

θ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire x.

APPLICATION A L'AJUSTEMENT DES CHEMINEMENTS

Densité de probabilité

Soient a_i et b_i avec $i = 1, 2 \ldots n$, la projection sur l'axe des x puis des y respectivement, d'un vecteur $\vec{V}_i$ côté quelconque d'un cheminement allant de A vers B.

Des mesures entachées d'erreurs accidentelles nous donnent :

$$x_i = a_i + dx_i \qquad \text{avec} \qquad dx_i \leqslant 0$$

$$y_i = b_i + dy_i \qquad \text{avec} \qquad dy_i \leqslant 0$$

UNIV. LEIDEN BIBL.

La densité de probabilité de l'erreur commise sur $\vec{V}_i$ s'exprime par la fonction $f_i(a_i, b_i; x_i, y_i)$; les x_i, y_i sont des grandeurs connues tandis que les a_i, b_i apparaissent comme des paramètres dont nous voulons obtenir la valeur optimale.

$$\prod_i f_i(a_i, b_i; x_i, y_i)$$

Pour la commodité des calculs, il est d'usage de considére la fonction logarithmique :

$$\Phi = \sum_i \text{Log } f_i(a_i, b_i; x_i, y_i)$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à cho sir comme valeurs des a_i, b_i celles qui rendent la fonction maximale.

Ces valeurs seraient celles qui annulent les dérivées de si les a_i, b_i n'étaient soumis à aucune condition; or :

$$\sum_i (a_i) = X_B - X_A = \Delta X$$

$$\sum_i (b_i) = Y_B - Y_A = \Delta Y$$

ΔX et ΔY sont des quantités connues puisqu'elles s'obtien nent à partir des coordonnées du point de départ et du poin d'arrivée.

Nous sommes dans le cas de recherche d'un maximum li D'où l'apparition de deux nouveaux paramètres :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i} = \frac{\partial f_i/\partial a_i}{f_i} = \lambda \qquad \text{et :} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial b_i} = \frac{\partial f_i/\partial b_i}{f_i} = \mu$$

Appelons $\rho_i(v)$ la loi de probabilité sur la mesure des lo gueurs et $\delta_i(\theta)$ celle sur la mesure des angles.

ρ et δ sont indépendantes puisque les mesures d'angles de longueurs sont l'objet de deux opérations distinctes.

Le fait d'attribuer à ρ et δ un indice i, tel que : $i = 1, 2 \ldots$ montre que nous ne supposons pas *a priori* que tous les côt et tous les angles du cheminement ont même précision.

Les coordonnées X_i et Y_i de l'extrémité d'un côté de polyg nale dépendent des erreurs dv et $d\theta$ faites respectivement su les mesures de longueurs et d'angles.

La loi de probabilité pour qu'un point $(X_i\, Y_i)$ soit compr dans la petite surface $(dv, d\theta)$, figure n° 1, définie en coo données polaires est :

$$\rho_i(v).\delta_i(\theta)\, dv.d\theta = g_i v$$

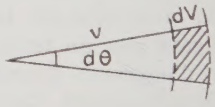

FIG. 1.

Nous passons des coordonnées polaires aux coordonné cartésiennes par la relation :

$$g_i(x = v\cos\theta, y = v\sin\theta)\, v.dv.d\theta = g_i(x, y)\, dxdy$$

Par substitution entre ces deux dernières relations, il vien

$$g_i = \frac{\rho_i(v).\delta_i(\theta)}{v}$$

Donc :

$$f_i(a_i, b_i; x_i, y_i) = g_i(x_i - a_i;\ y_i - b_i)$$

ainsi se trouve définie la densité de probabilité de l'erre commise sur $\vec{V}_i$. Précisons cette fonction :

$$g_i = \frac{\rho_i(v_i).\delta_i(\theta_i)}{v_i}$$

$$= \rho_i \frac{(\sqrt{(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2})}{\sqrt{(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2}} .\delta_i\left(\text{arc tg}\frac{y_i - b_i}{x_i - a_i}\right)$$

$\rho_i(v)$ et $\delta_i(\theta)$

FONCTION $\rho_i(v)$

Une longueur est une grandeur positive par définition; d'autre part, nous avons vu qu'une mesure quelle qu'elle soit peut être considérée comme imparfaite : il suffit de choisir une unité de mesure suffisamment petite. C'est pourquoi la relation $\rho_i(v) = 0$ avec $v = 0$, en désignant par v l'écart linéaire réalisé sur une mesure, est un cas limite.

Cependant, les petites erreurs sont les plus nombreuses, aussi la fonction $\rho(v)$ doit atteindre rapidement sa valeur maximale, puis à partir d'une certaine valeur, décroître brusquement, en tendant vers zéro quand v augmente infiniment.

Nous sommes ainsi amenés à choisir la fonction :

$$\rho(v) = \frac{1}{\sigma}\, e^{-(v^2/2\sigma^2)} \cdot v \qquad \text{avec} \quad v > 0$$

dont la courbe représentative, (fig. 2), est conforme aux conditions ci-dessus mentionnées.

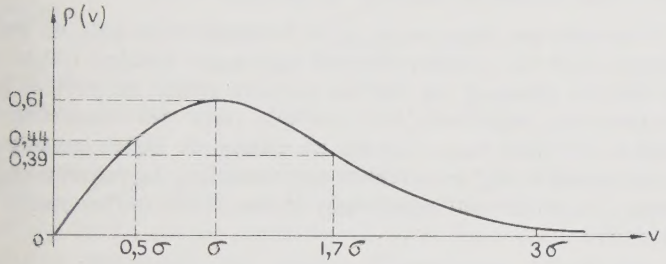

Fig. 2.

Nota. — Dans le texte original, nous avions choisi la fonction :

$$\rho(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(v^2/2\sigma^2)}\, v,$$

dont l'intégrale définie, entre les valeurs zéro et + l'infini, est $\sigma/\sqrt{2\pi}$ soit 1 pour $\sigma = \sqrt{2\pi}$.

La fonction $\rho(v)$ était alors rigoureusement une loi de probabilité pour $\sigma = \sqrt{2\pi} \# 2{,}5$.

La détermination expérimentale de l'écart moyen quadratique nous avait en effet conduit à une valeur moyenne de 2,5 mm en polygonation de précision, pour un côté de 100 m environ; d'où le choix du coefficient :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Cependant, dans le cadre d'une théorie générale, nous ne devons pas nous limiter à un cas particulier; c'est pourquoi, nous attribuons le coefficient $1/\sigma^2$ à la fonction $\rho(v)$ qui devient ainsi une loi de probabilité quelle que soit la valeur de σ; en effet :

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{+\infty} e^{-(v^2/2\sigma^2)} \cdot v \cdot dv = 1$$

Le changement de coefficient dans la fonction $\rho(v)$ ne modifie rien dans le résultat final.

L'erreur moyenne quadratique σ est fonction des conditions de mesure; nous devons donc attribuer à chaque mesure de longueur sa propre loi de probabilité :

$$\rho_i(v_i) = \frac{1}{{\sigma_i}^2}\, e^{-(v_i^2/2\sigma_i^2)} \cdot v_i$$

$$\rho'(v) = \frac{e^{-(v^2/2\sigma^2)}}{\sigma^2} \cdot \left(-\frac{v^2}{\sigma^2} + 1\right)$$

$$\rho'(v) = 0 \qquad \text{si} \qquad v = \sigma$$

La courbe est croissante pour $\rho'(v) > 0$, soit $\sigma > v$.
La courbe est décroissante pour $\rho'(v) < 0$, soit $\sigma < v$.

Déterminons le point d'inflexion :

$$\rho''(v) = -\frac{e^{-(v^2/2\sigma^2)}}{\sigma^6}\, v\,(3\sigma^2 - v^2)$$

$$\rho''(v) = 0 \text{ pour } v = 0 \text{ et } v = \sigma\sqrt{3}$$

Comme $v > 0$ nous avons un point d'inflexion d'abscisse $v = \sigma\sqrt{3}$.

En prenant σ comme unité sur l'axe des abscisses, nous avons :

— le sommet de la courbe, de coordonnées :

$X = 1 \qquad Y = 0{,}61$

— le point d'inflexion, de coordonnées :

$X = 1{,}73 \qquad Y = 0{,}39$

Le calcul de quelques autres points nous a permis de préciser la forme de la courbe représentative de la fonction $\rho(v)$.

FONCTION $\delta_i(\theta)$

Un gisement est un angle orienté; une erreur $d\theta$ sur la mesure d'un angle topographique interviendra donc différemment dans la détermination des coordonnées du point visé, suivant que cet écart sera positif ou négatif. D'autre part, nous avons montré expérimentalement que :

1° les écarts ne dépassent pas une certaine valeur absolue maximale;

2° dans la limite de cet intervalle de définition, les petits écarts sont pratiquement aussi nombreux que les plus grands.

Par exemple, pour l'angle $\widehat{EOF}$ nous avons obtenu 4 écarts maximaux de 3 mgr en valeur absolue, et quatre écarts nuls par rapport à la moyenne arithmétique des mesures de cet angle.

Tout se passe comme si nous avions une courbe de répartition de Gauss très aplatie à sa partie supérieure, ainsi que l'indique la figure 3. Sur cette courbe apparaissent deux

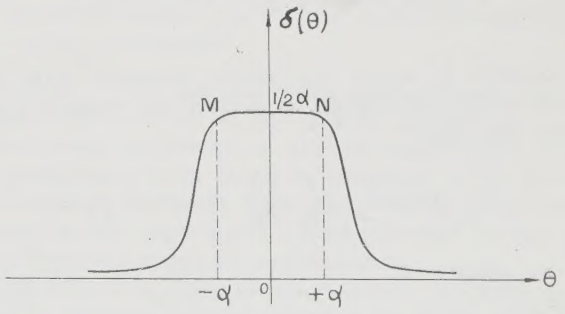

Fig. 3.

points M et N de même ordonnée et d'abscisses respectives $-\alpha$, $+\alpha$.

Les calculs de la méthode du maximum de vraisemblance seront notablement simplifiés si nous considérons comme

précédentes, et si nous admettons que la portion de courbe MN est un segment de droite, ce que traduisent également bien nos résultats expérimentaux.

Nous définirons donc comme suit, la loi de probabilité $\delta(\theta)$:

$$\delta(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\theta| > \alpha \\ 1/2\,\alpha & \text{si} \quad |\theta| \leqslant \alpha \end{cases}$$

ce qui revient à dire que tous les écarts angulaires ont même densité de répartition dans l'intervalle $(-\alpha, +\alpha)$ (fig. 4).

Chaque mesure d'angle peut être caractérisée par sa précision en adoptant des valeurs différentes pour α.

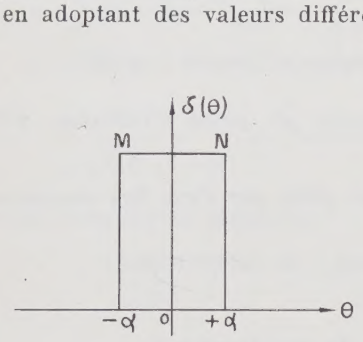

FIG. 4.

Pour chaque angle nous avons donc :

$$\delta_i(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\theta| > \alpha_i \\ 1/2\,\alpha_i & \text{si} \quad |\theta| \leqslant \alpha_i \end{cases}$$

L'ordonnée de la droite MN est $1/2\,\alpha_i$ afin que l'intégrale de la densité de probabilité, c'est-à-dire l'aire de la courbe représentative, soit égale à 1.

Détermination des facteurs λ et μ

Rappelons que la fonction exprimant la densité de probabilité est :

$$g_i = \frac{\rho_i \sqrt{(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2}}{\sqrt{(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2}} \cdot \delta_i \left(\text{arc tg.} \frac{y_i - b_i}{x_i - a_i} \right)$$

en remplaçant ρ_i et δ_i par leur valeur respective :

$$\text{Log}\, g_i = -\text{Log}\,(\sigma_i)^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2}\,[(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2] + \frac{1}{2}\,\text{Log}\,[x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2] - \frac{1}{2}\,\text{Log}\,[(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2] + \text{Log}\,\delta_i$$

La fonction δ_i, ayant une valeur constante dans chaque intervalle ou elle est définie, sa dérivée par rapport à a_i ou b_i est nulle. Par suite :

$$\partial_{a_i}(\text{Log}\, g_i) = \frac{1}{g_i}\,\frac{\partial g_i}{\partial a_i} = \lambda = \frac{x_i - a_i}{\sigma_i^2}$$

donc : $x_i - \lambda\sigma_i^2 = a_i$;

$$\partial_{b_i}(\text{Log}\, g_i) = \frac{1}{g_i}\,\frac{\partial g_i}{\partial b_i} = \mu = \frac{y_i - b_i}{\sigma_i^2}$$

donc : $y_i - \mu\sigma_i^2 = b_i$.

Comme :

$$\sum_i a_i = \Delta X \qquad \text{et} \qquad \sum_i b_i = \Delta Y$$

$$\sum_i a_i = \sum_i x_i - \lambda \sum_i \sigma_i^2 = \Delta X$$

et :

$$\sum_i b_i = \sum_i y_i - \mu \sum_i \sigma_i^2 = \Delta Y$$

donc :

$$\lambda = \frac{\sum_i x_i - \Delta X}{\sum_i \sigma_i^2} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{\sum_i y_i - \Delta Y}{\sum_i \sigma_i^2}$$

Aux composantes mesurées x_i et y_i, d'un côté quelconque cheminement, nous apportons donc les corrections $-\lambda\sigma_i^2$ $-\mu\sigma_i^2$ respectivement, afin d'obtenir les coordonnées les p vraisemblables de l'extrémité de ce $i^{\text{ème}}$ côté.

Remarques

I. — Dans la fonction $\rho(v)$, le symbole σ représente l'err moyenne quadratique sur un côté. En désignant par e l'err moyenne quadratique sur une portée de ruban, on a do

$$\sigma = e\sqrt{p}$$

si le côté considéré contient p portées.

Précisons que dans le cas où la longueur d'un côté de p gonale n'est pas rigoureusement égal à un nombre entier portées de ruban, p est égal au nombre entier de portées médiatement supérieur. Par exemple pour des longueurs 80,05 m et 99,90 : $p = 5$ avec un ruban de 20 m; nous mons en effet que les erreurs accidentelles de pointer et tracer, se produisent aussi dans le cas d'une portée parti de ruban.

II. — Nous attirons tout particulièrement l'attention lecteur sur le fait que la fonction $\rho(v)$ est définie dans l'in valle $]0, +\infty[$, ce qui revient à dire que toute erreur est co dérée en valeur absolue. Un côté de polygonale n'ayant au signe, positif ou négatif, quel que soit son gisement, n avons de même considéré tout écart linéaire comme un ment géométrique : le segment de droite qu'il est *a pr* avant toute considération algébrique.

Le signe d'une erreur linéaire résulte du choix d'un tème de coordonnées, il est donc purement convention ainsi la mesure d'un côté de cheminement avec un ruban court, entraîne un écart linéaire bien défini en valeur a lue, mais dont le signe dépend du système d'axes de r rence.

Pour la répartition des écarts angulaires, nous avons plement choisi la loi de Gauss en simplifiant la courbe re sentative, au vu des expériences réalisées pour la mesur l'erreur moyenne quadratique.

Précisons d'ailleurs que si nous avons étudié séparé la répartition des écarts angulaires et linéaires, c'était en faire une analyse aussi complète que possible; ma aurait été peut-être plus clair, pour le lecteur, de consid l'erreur sur un côté de cheminement comme la résultant d'une erreur linéaire et d'une erreur angulaire. Ces deux posantes, compte tenu de leur signe, positif ou négatif, leur intervalle de variation en valeur absolue, détermi autour de la position réelle d'un sommet quelconque de gonale, une portion de plan dans lequel peut se trouve point calculé, entaché d'erreurs. Dès lors que nous con rons des zones d'incertitude et non plus des vecteurs, la n sité de prendre dv en valeur absolue apparaît plus évid

Nous aurions alors appliqué la fonction de répartition à dv et serions ainsi parvenus au même résultat sans a à faire intervenir la fonction $\partial(\theta)$. Le problème de la sim cation de cette dernière fonction de répartition ne se s donc pas posé.

Mesure des longueurs

Dans un chapitre consacré à la recherche de la valeur absolue des erreurs accidentelles, nous avons présenté une méthode expérimentale pour connaître l'erreur moyenne quadratique sur une portée de ruban. Nous en exposons le principe, qui n'est d'ailleurs pas nouveau : avec un ruban d'acier de 20 m de longueur, nous avons réalisé plusieurs séries de mesures d'une portée, dans des conditions très différentes, afin de mettre en évidence la combinaison des erreurs accidentelles de pointer, de tracer et calculer ainsi l'erreur moyenne quadratique dans chaque cas.

Nous avons déterminé vingt-cinq fois une portée de 20 m, de telle sorte que l'origine du ruban soit chaque fois déplacée de 1 cm lorsque l'emploi de craie ou crayon est possible, et 2 cm pour l'emploi de fiches; l'extrémité du ruban permet ainsi de matérialiser un nouveau point à chacune des mesures.

Soit l_i l'intervalle, mesuré en millimètres, entre le premier et le $i^{ème}$ point de la série origine.

Soit L_i l'intervalle entre le premier et le $i^{ème}$ point de la série terminale.

Il est facile d'évaluer l'écart $L_i - l_i$ et l'erreur moyenne quadratique :

$$e = \pm \frac{\sqrt{\Sigma (|L_i - l_i|)^2}}{n - 1}$$

avec : $n = 25$.

Ce procédé a l'avantage d'éliminer toute erreur systématique à la seule condition d'exercer sur la chaîne une tension constante tout au long de l'expérience. En effet la longueur exacte de la chaîne n'intervient pour rien dans ces mesures, ce qui annule les erreurs d'étalonnage, d'élasticité, de chaînette, et l'horizontalité, ainsi que l'erreur de dilatation puisque l'expérience est de courte durée, donc faite à une température constante.

Suivant ce principe nous avons réalisé quatre types d'expériences :

1) chaînage à plat sur route. . . . . $e = \pm 0{,}95$ mm
2) chaînage à plat en terrain labouré. . . . . $e = \pm 1{,}24$ mm
3) chaînage par cultellation sur route. . . . . $e = \pm 1{,}33$ mm
4) chaînage en mode suspendu, tout terrain. $e = \pm 2{,}71$ mm

En conclusion nous pouvons dire que l'erreur moyenne quadratique sur une portée de ruban de 20 m, varie de ± 1 à ± 3 mm, suivant les difficultés rencontrées en polygonation rurale.

Le service du Cadastre a fait une expérience de ce genre en polygonation urbaine de précision; le résultat obtenu a été :

$$e = \pm 0{,}85 \text{ mm}$$

Mesure des angles

L'erreur moyenne quadratique e', dans le cas de la mesure des angles est fonction de la précision de l'appareil, c'est pourquoi nous devons préciser que les résultats suivants ont été obtenus à l'aide d'un tachéomètre Wild RDS, gradué en centigrades, mais permettant une lecture au milligrade par interpolation entre deux graduations.

L'expérience a été réalisée en forêt de Saint-Germain-en-Laye, au cours d'un après-midi du mois de décembre par temps couvert; les conditions de visibilité étaient donc médiocres.

Le tachéomètre était placé au carrefour de deux allées presque perpendiculaires, le long desquelles nous avions planté trois piquets respectivement à des distances de 50, 150 et 250 m à partir de l'appareil (fig. 5); tous situés à la même altitude et ayant 2,5 cm de côté, ils étaient surmontés d'une

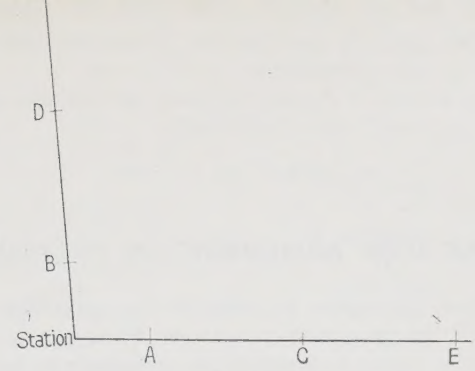

Fig. 5.

pointe de 2 mm de diamètre, plantée suivant leur axe longitudinal.

Une première série de vingt mesures d'angles a été réalisée en visant les pointes des piquets A, B, C et D; il fallut renoncer à viser les pointes situées en E et F car la visibilité était insuffisante.

Ensuite, derrière chacun des six piquets nous avons placé un jalon de 2,5 cm de diamètre, et nous avons recommencé la série des vingt mesures pour chacun des trois angles.

Pour bien faire apparaître toutes les erreurs accidentelles, et notamment l'erreur de parallaxe, due au changement de mise au point du réticule, nous avons opéré comme suit :

a) pour les visées sur pointe, nous avons pointé successivement A et C d'une part, puis B et D d'autre part, nous obligeant ainsi à retoucher la mise au point avant chaque visée;

b) au contraire, pour les visées sur jalon, nous avons pointé A et B sans changement de mise au point, puis C et D.

Les visées sur les piquets E et F ont été incluses dans la première catégorie de mesures. Les résultats ont été les suivants :

— angle $\widehat{AOB}$:
  — sur jalon. . . . . $e' = \pm 2{,}2$ mgr
  — sur pointe. . . . . $e' = \pm 1{,}4$ mgr
— angle $\widehat{COD}$:
  — sur jalon. . . . . $e' = \pm 2{,}1$ mgr
  — sur pointe. . . . . $e' = \pm 2{,}3$ mgr
— angle EOF :
  — sur piquet. . . . . $e' = \pm 1{,}9$ mgr

Il est remarquable qu'à 150 m, une visée sur jalon, sans changement de mise au point, soit plus précise qu'une visée sur pointe après changement de mise au point du réticule; cette incidence semble, par contre, moins marquée lorsqu'on vise un détail rapproché.

Remarque. — Un des théorèmes fondamentaux de la théorie probabiliste est la loi des grands nombres :

Etant donné un nombre ε, arbitrairement petit, la probabilité pour que l'écart entre la fréquence et la probabilité de l'événement favorable, dans une série de n épreuves, soit en valeur absolue supérieur à ε, tend vers zéro lorsque le nombre des épreuves augmente indéfiniment.

Ce qui revient à dire que les mesures, destinées au calcul de e et e', limitées respectivement à 25 et 20, sont certainement trop peu nombreuses pour donner une valeur exacte de l'erreur moyenne quadratique. Nous pensons néanmoins que les résultats obtenus nous en donnent une valeur très approchée, compte tenu de l'unité de mesure considérée; de plus, nous voulions surtout mettre en évidence la variation de e et e', en fonction des conditions de travail et du mode opératoire.

quadratique sur la mesure d'un côté de cheminement; $\sigma = e\sqrt{p}$ qui, nous l'avons montré, intervient seule dans la compensation des polygonales.

La valeur donnée à e sera fonction des conditions de travail et pourra varier dans l'intervalle :

$$\pm 1 \text{ mm} \leqslant e \leqslant \pm 3 \text{ mm}$$

EXEMPLE D'UN AJUSTEMENT DE POLYGONALE

Nous allons appliquer la méthode du maximum de vraisemblance, à un cheminement extrait d'une polygonation effectuée dans le cadre de la réfection cadastrale de la commune de Maurecourt, département des Yvelines.

Conditions de travail

Cette polygonale relie deux points géodésiques de triangulation complémentaire « Les Charraux » et « Mortemay » déterminés par le Service du Cadastre et matérialisés chacun par une borne.

Leur précision planimétrique est de l'ordre de 1 à 2 dm seulement car ils sont rattachés à l'ancien réseau de triangulation, non encore renouvelé par l'Institut Géographique national, dans la région parisienne.

Les angles ont été déterminés avec un théodolite Chasselon à deux verniers assurant ainsi quatre lectures en deux visées sur un même point : cercle à gauche et cercle à droite.

Les mesures de distances ont été faites à l'aide d'un ruban d'acier de 20 m de longueur, sans poignée dynamométrique, mais préalablement étalonné. L'extrémité de chaque portée a été matérialisée à l'aide d'une fiche, car nous n'avons opéré qu'en terrain de culture et sur chemin de terre.

Le point le plus élevé du cheminement est à la cote 99 m, le point le plus bas à 72 m, la pente restant cependant partout inférieure à 10 %. La topographie du terrain nous a obligé à chaîner par cultellation, à l'exception du second côté presque horizontal, où le ruban a pu être posé sur le sol.

Les deux premières portées de ruban sur le premier côté ont été exécutées dans des conditions très difficiles puisque le point géodésique de départ : « les Charraux », est situé sur un tumulus de plusieurs mètres de hauteur, entouré de broussailles épaisses. Les quatre autres portées de ce côté ont été réalisées dans des conditions normales par cultellation (fig. 6).

L'erreur moyenne quadratique sur ce premier côté est donc :

soit : $\sigma^2 = 34$, d'où une erreur moyenne quadratique d 2,4 mm par portée.

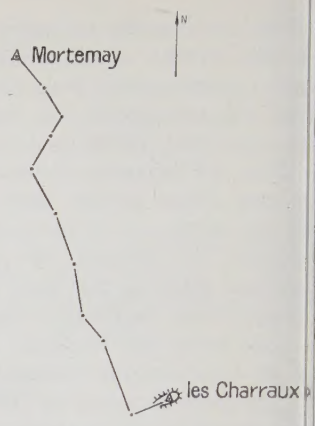

FIG. 6.

Sur le second côté du cheminement, chaîné à plat, no avons adopté pour σ une valeur uniforme de 1 mm par port de ruban. Enfin pour toutes les autres portées : $\sigma = 2$ mm.

Calculs

Les calculs sont résumés sur deux tableaux :

— Le tableau I nous permet de rendre la compensati réversible et de calculer les gisements ainsi que leurs lign trigonométriques : sinus et cosinus;

— Le tableau II résume la méthode du maximum de vra semblance; sur la deuxième colonne figurent les valeu moyennes des deux mesures de chacun des côtés. Ces qua tités L doivent être affectées ensuite de la correction de rédu tion au niveau de la mer et de la déformation due à la proje tion conique Lambert. A l'altitude moyenne du territoire la commune de Maurecourt, cette correction est de — 20 c par kilomètre.

La colonne n° 3 contient donc les valeurs de ces corre tions et la colonne n° 4 celles des longueurs définitives L'.

Calcul de λ et μ :

$$\lambda = \frac{dX}{\sum \sigma^2} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{dY}{\sum \sigma^2}$$

d'où les termes correctifs :

$$-\lambda . \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad -\mu . \sigma^2$$

TABLEAU I. — *Calcul des gisements - Réversibilité*

Sommets	Angles topographiques θ					Valeur moyenne de θ	Correction angulaire	Gisements G des côtés	Sinus G	Cosinus G
	Angles en grades	Cercle à droite — Appoint Vernier		Cercle à gauche — Appoint Vernier						
		gauche	droit	gauche	droit					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Tour Biot								384,044		
Les Charraux	311	163	160	160	161	311,161		272,883	0,91064	0,41322
65	95	850	852	853	842	95,849		377,034	0,35297	0,93563
66	219	750	745	743	750	219,747	1	357,286	0,62173	0,78323
67	166	592	591	593	600	166,594	1	390,691	0,14570	0,98933
68	214	180	171	180	173	214,176		376,515	0,36059	0,93272
69	211	360	370	358	361	211,362		365,153	0,52045	0,85389
70	129	854	850	850	851	129,851	1	35,301	0,52652	0,85016
71	200	789	791	790	790	200,790	1	34,510	0,51592	0,85664
72	270	430	426	431	430	270,429	1	364,080	0,53477	0,84500
73	210	146	160	150	147	210,151	1	353,928	0,66216	0,74936
Mortemay Chnée LTT	56	582	585	583	581	56,583	1	97,344		

Sommets (1)	Longueurs mesurées L (2)	Corrections de réduction (3)	Longueurs corrigées L' (4)	Nombre de portées de ruban p (5)	e (6)	$\sigma^2 = pe^2$ (7)	Δx (8)	Δy (9)	$-\lambda\sigma^2$ (10)	$-\mu\sigma^2$ (11)	Abscisses X (12)	Ordonnées Y (13)
Les Charraux											578 979,74	143 244,76
65	103,43	— 2	103,41	6	2,4	34	— 94,17	— 42,73	+ 4	+ 2	578 885,61	143 202,05
66	204,89	— 4	204,85	11	1	11	— 72,30	+ 191,66	+ 1	+ 1	578 813,32	143 393,72
67	85,92	— 2	85,90	5	2	20	— 53,40	+ 67,28	+ 2	+ 1	578 759,94	143 461,01
68	131,50	— 3	131,47	7	2	28	— 19,15	+ 130,07	+ 3	+ 2	578 740,82	143 591,10
69	140,49	— 3	140,46	8	2	32	— 50,65	+ 131,01	+ 4	+ 2	578 690,21	143 722,13
70	130,87	— 3	130,84	7	2	28	— 68,09	+ 111,72	+ 3	+ 2	578 622,15	143 833,87
71	95,40	— 2	95,38	5	2	20	+ 50,22	+ 81,09	+ 2	+ 1	578 672,39	143 914,97
72	56,94	— 1	56,93	3	2	12	+ 29,37	+ 48,77	+ 1	+ 1	578 701,77	143 963,75
73	87,96	— 2	87,94	5	2	20	— 47,03	+ 74,31	+ 2	+ 1	578 654,76	144 038,07
Mortemay	113,56	— 2	113,54	6	2	24	— 75,18	+ 85,08	+ 3	+ 2	578 579,61	144 123,17

$\Sigma\sigma^2 = 229$ $\quad \Delta'X = -400{,}38$ $\quad \Delta'Y = +878{,}26$

$X_F = 578\,579{,}61$
$-X_0 = 578\,979{,}74$
$\Delta X = -400{,}13$

$Y_F = 144\,123{,}17$
$-Y_0 = 143\,244{,}76$
$\Delta Y = +878{,}41$

$\Delta'X = -400{,}38$ $\quad -\Delta X = +400{,}13$ $\quad dX = -0{,}25$ m

$\Delta'Y = +878{,}26$ $\quad -\Delta Y = -878{,}41$ $\quad dY = -0{,}15$ m

$\lambda = \frac{-25}{229} = -0{,}109$ $\qquad \mu = \frac{-15}{229} = -0{,}065$

CONCLUSION

Nous sommes donc arrivés à un résultat facilement exploitable, grâce à une simplification logique sur la fonction $\partial(\theta)$, cela consiste à négliger la très faible densité de répartition des plus gros écarts angulaires; plusieurs séries d'expériences nous ont permis de constater que ces écarts, au-delà des valeurs $\pm\alpha$ précédemment définies, peuvent être considérés comme des fautes; or tout mode opératoire correct doit permettre l'élimination des fautes, ne serait-ce que par la répétition des mesures sur la même grandeur.

Cette simplification n'altère pas la précision des résultats obtenus, et rend plus facilement exploitable une méthode d'ajustement qui est une application directe de la théorie mathématique des probabilités.

Nous sommes partis de lois générales, aussi les résultats obtenus sont indépendants du système de coordonnées choisi.

L'intérêt de la méthode du maximum de vraisemblance est qu'elle tient compte, non seulement du nombre de portées de ruban par côté, mais aussi de leur qualité d'exécution; en effet, il est rare en polygonation rurale que le chaînage soit effectué dans les conditions homogènes de travail : en dehors des chemins, le sol accuse parfois de brusques dénivellations et se trouve presque toujours recouvert de végétation faisant obstacle au chaînage.

Enfin, la théorie mathématique nous montre que la solution la plus vraisemblable en matière d'ajustement, est d'affecter un même signe positif ou négatif, à tous les termes correctifs; cela permet en outre d'atténuer rationnellement les effets de petits écarts systématiques qu'il est difficile d'éliminer complètement lors de la mesure des longueurs; c'est le cas, par exemple, lorsque l'on néglige les corrections de température et d'élasticité.

Guy NEUVY,
Géomètre expert D.P.L.G.,
Docteur ès Sciences appliquées.

ERRATA

Dans notre précédent numéro nous avons publié un important article de MM. Cortier et Mercier : « Les ventilateurs des centrales thermiques d'Electricté de France ».

Malheureusement par suite d'une fausse manœuvre à la mise sous presse, les diagrammes des figures 1 et 2 se sont trouvés intervertis, les légendes restant en bonne place. Ainsi le diagramme en milieu de colonne se rapporte à un ventilateur hélicoïde à pas fixe avec directrices à l'aspiration et le diagramme en bas de colonne se rapporte à un ventilateur centrifuge avec directrices à l'aspiration.

D'autre part, en page 157, une faute s'est glissée dans le tableau de caractéristiques en haut de page : la puissance de la centrale de Cordemais est de 600 MW (non de 250 MW).

Nous prions nos lecteurs et les auteurs de bien vouloir nous excuser de ces deux erreurs.